Тема 8. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Дифференциальное уравнение 1-го порядка связывает независимую переменную, искомую функцию и её первую производную:

$$f\ (x,y,y') = 0,$$

x – независимая переменная, y – искомая функция, y′ – её производная.

$$y' = f\ (x,y) \qquad (1)$$

Уравнение (32) называется уравнением 1-го порядка, разрешённым относительно производной.

Решением дифференциального уравнения 1-го порядка называется всякая функция $y = \lambda(x)$ которая при подстановки в уравнение обращается в тождество.

Общим решением дифференциального уравнения 1-го порядка $y' = f(x,y)$ в области *D* называется функция $y = \varphi(x,C)$, обладающая следующими свойствами:

1) она является решением данного уравнения при любых значениях производной постоянной C, принадлежащей некоторому множеству;
2) для любого начального условия $y(x_0) = y_0$: $(x_0 y_0) \in D$, существует единственное значение C = C_0, при котором решение $y = \varphi(x,c_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Всякое решение $y = \varphi(x,c_0)$, получающееся из общего решения $y = \varphi(x,c)$ при конкретных значениях $C = C_0$, удовлетворяющее заданному начальному условию называется частным решением.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется уравнением с разделяющимися переменными, если его можно представить

$$y' = f_1(x) f_2(y) \qquad (2)$$

Метод интегрирования уравнения с разделяющимися переменными состоит в следующем: перепишем уравнение (33) в виде $\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$. Умножим обе части данного уравнения на $\frac{dx}{f_1(y)}$, получим:

$$\frac{dy}{f_1(y)} = f_1(x)dx \qquad (3)$$

Если уравнение (2) представлено в виде (3), то говорят, что в нём разделены переменные. Интегрируя его, получим:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C \qquad (4)$$

Выражение (35) представляет собой общий интеграл уравнения (4).

Замечание. Разделив обе части уравнения (2) на f_2(y), мы можем потерять те решения, при которых $f_2(y) = 0$. Действительно, если $f_2(y) = 0$ при $y = y_0$, то функция const $y = y_0$ – является решением (4).

Пример № 1. Решить уравнение $y' = -\dfrac{y}{x}$, y (1) = 2.

Решение. Запишем уравнение в виде: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$, разделяя переменные получим: $\int \dfrac{dy}{y} = -\int \dfrac{dx}{x}$, интегрируя, находим общее решение $y = \dfrac{c}{x}$. При делении на y мы могли потерять решение y = 0, но последнее содержится в общем решении при C = 0.

Однородные уравнения. Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется однородным если его можно представить в виде:

$$y' = \varphi(\frac{y}{x}), \qquad (5)$$

где правая часть есть функция только отношения $\frac{y}{x}$.

Введём новую функцию z , полагая $\dfrac{y}{x} = z$, или y = x·z, тогда y′ = x′·z + x·z′. Подставляя в (5), получаем:

$$z + x\frac{dz}{dx} = \varphi(z) - z.$$

Предполагая, что $\varphi(z) - z \neq 0$, имеем $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{\varphi(z) - z}$.

Интегрируя, получим:

$$\ln|x| = \int \frac{dz}{\varphi(z) - z} + C.$$

Возвращаясь к старой переменной y = x·z, получим искомое решение однородного уравнения.

Пример № 2. Решить дифференциальное $xyy' = x^2 + y^2$.

Решение. Убеждаемся, что данное уравнение является однородным:

$\lambda x \cdot \lambda y \cdot y' = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2$ или $xyy' = x^2 + y^2$. Введём новую функцию z , полагая $\frac{y}{z} = z$, или y = x·z, тогда y′ = x′·z + x·z′. Подставляя в уравнение получим: x·xz· (x′·z + x·z′) = $x^2 + (xz)^2$. Сокращая на x^2 приходим к уравнению: $x\frac{dz}{dx} = 1$. Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$z = \ln|x| + C, \text{ или } \frac{y}{x} = \ln|x| + C.$$

Линейные уравнения. Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется линейным, если его можно представить в виде:

$$\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot y + Q(x), \qquad (6)$$

где P(x), Q(x) – заданные функции. Если Q(x) ≡ 0, то уравнение (6) называется линейным однородным уравнением. Уравнение (6) интегрируется следующими способами.

1. *Метод Лагранжа.*

Решаем однородное уравнение, то есть уравнение $\frac{dy}{dx} = p(x) \cdot y$.

В этом уравнение переменные разделяются $\frac{dy}{y} = P(x)dx$ и его общее решение имеет вид:.

$$\ln|y| = \int P(x)dx + C \Rightarrow y = \pm C_1 e^{\int p(x)dx} = Ce^{\int p(x)dx}$$

Общее решение будем искать в виде :

$$y = C(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \qquad (7)$$

$$y' = c'(x)e^{\int p(x)dx} + c(x)e^{\int p(x)dx}(\int p(x)dx)' = C'(x)e^{\int p(x)dx} + C(x)P(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Подставляем y и y′ в уравнение (6):

$$C'(x)e^{\int p(x)dx} = Q(x), \text{ или } C'(x) = Q(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Интегрируя находим:

$$C(x) = \int Q(x) e^{-\int p(x)dx} dx + C_0$$

Подставляя найденное выражение в (38), получаем:

$$y = (\int Q(x) e^{-\int p(x)dx} dx + C_0)\, e^{\int P(x)dx}$$

2. *Метод Бернулли.*

Решение уравнения (6) будем искать в виде:

y = u(x)·v(x).

Тогда уравнение (6) имеет вид:

(u(x)·v(x))′ = P(x) u(x)·v(x) + Q(x)

или

u′(x)·v(x) + u(x)·v′(x) – P(x) u(x)·v(x) = Q(x).

Выберем в качестве v какое – нибудь частное решение уравнения:

v′(x) – P(x) ·v(x) = 0,

$$\frac{dv}{dx} = P(x) \cdot v(x),$$

$\frac{dv}{v} = P(x)dx$, откуда $\ln|v| = \int P(x)dx$, или v = $e^{\int P(x)dx}$.

Тогда для отыскания u получим уравнение

u′(x) $e^{\int P(x)dx}$ = Q(x).

$$\frac{du}{dx} = Q(x) e^{-\int P(x)dx},$$

откуда $u(x) = \int Q(x) e^{-\int p(x)dx} dx + C$, значит общее решение данного уравнения имеет вид: $y = (\int Q(x) e^{-\int p(x)dx} dx + C_0)\, e^{\int P(x)dx}$.

Пример № 3. Найти общее решение уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^2$.

Решение. Решим методом Лагранжа.

1. Находим вначале решение однородного уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$. Разделяя переменные и интегрируя, находим: ln $|y|$ = ln $|x|$ + C или y = Cx.

2. Решение неоднородного уравнения ищем в виде: y = C(x)·x. Подставляем в уравнение данную функцию: C′(x)·x + C(x) = C(x) + x^2 или C′(x) = x, проинтегрируем последнее уравнение: C(x) = $\frac{x^2}{2}$ + A. Следовательно, общее решение уравнения имеет вид: y = ($\frac{x^2}{2}$ + A)·x.

Уравнения в полных дифференциалах. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (8)$$

Это уравнение 1-го порядка, т.к. $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=-\frac{\mathrm{P(x_1y)}}{\mathrm{Q(x_1y)}}$. Допустим, что $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – непрерывны вместо со своими частными произв. $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой области G. Если левая часть уравнения (8) является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$, т.е. $dU(x,y)=$ $=P(x,y)dx+Q(x_1y)dy$, то уравнение (8) называется уравнением в полных дифференциалах и может быть записано в виде $dU(x,y)=C$. Как известно, для того чтобы выражение Pdx + Qdy было полным дифференциалом необходимо чтобы в области G выполнялось равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (9)$$

Если это условие выполняется, то функция $\mathrm{U(x_1y)}$ находится следующим образом:

$$U(x_1y)=\int\limits_{x_0}^{x} p(t,y_0)dt+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt \quad \Rightarrow$$

общий интеграл уравнения (8) запишем в виде:

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt=C$$

где – (x_0; y_0) произвольная фиксированная точка области G.

Пример 4. Проинтегрировать уравнение $\frac{dy}{dx}=\frac{1-2xy}{2+x^2}$.

Решение. Итак, P(x,y) = 2xy – 1, Q(x,y) = 2 + x^2, тогда $\frac{\partial P}{\partial y}$ = 2x, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ =2x, то есть выполнено условие (9). Следовательно,

$\int\limits_0^x (-1)dt + \int\limits_0^y (2+x^2)dt = C$, <u>–x + (2 + x^2)y = C.</u>

Дифференциальные уравнения второго порядка.

Уравнение $y'' = f(x)$. Введём новую переменную $\nu(x)$, полагая $y' = \nu(x) \Rightarrow y'' = \nu'(x)$ и, мы получим уравнение 1-го порядка: $\nu'(x) = f(x)$. Решая его имеем: $\nu(x) = \int f(x)dx = F(x) + C_1$, где F(x) – одна из первообразных от f(x), т.к. $\nu(x) = y'$, то

$$y' = F(x) + C_1 \Rightarrow y(x) = \int (F(x) + C_1)dx = \int F(x)dx + C_1 x + C_2$$

Уравнение $y'' = f(x, y')$. Это уравнение не содержит явно искомой функции y. Введём новую переменную $\nu(x) = y'$ и, замечая, что $y'' = \nu'(x)$, получаем уравнение: $\nu'(x) = f(x, \nu)$. Допустим, что найдено общее решение этого уравнения $\nu = \alpha(x, c_1), \Rightarrow y' = \alpha(x, c_1)$, то общее решение имеет вид:

$$y = \int \alpha(x, c_1)dx + C_2.$$

Пример 5. $(1+x^2)y'' - xy' = 0$.

Решение. Это уравнение не содержит явно искомой функции y. Введём новую переменную $z(x) = y'$ и замечая, что $y'' = z'(x)$, получаем уравнение: $(1+x^2)z' - xz = 0$ – уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решая его, находим $z = C\sqrt{1+x^2}$. Возвращаемся к старой переменной: $y' = C\sqrt{1+x^2}$. Интегрируя, получим общее решение $y = \frac{1}{2}C(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|) + B.$

Уравнение вида $y'' = f(y, y')$. Это уравнение не содержит явно независимую перемен. x. Введём новую переменную $\nu(y) = y'$. Дифференцируем это равенство по x:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d\nu(y)}{dx} = \frac{d\nu(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d\nu(y)}{dy} \cdot \nu(y) \Rightarrow y'' = \frac{d\nu}{dy} \cdot \nu.$$

Тогда $\frac{dv}{dy}\cdot v = f(y,v)$. Функция $v|y| = \alpha(y_1 c_1)$ является общим решением этого уравнения. Учитывая, что $v|y| = \frac{dy}{dx}$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$v|y| = \alpha(y_1 c_1) \Rightarrow \frac{dy}{\alpha(y_1 c_1)} = dx.$$

Интегрирую его получим общий интеграл:

$$\int \frac{dy}{\alpha(y_1 c_1)} = x + c_2.$$

Пример 6. Решить уравнение $2 + y'^2 = yy''$.

Решение. Это уравнение не содержит явно независимую перемен. x. Введём новую переменную $z(y) = y' \Rightarrow z' \cdot z = y''$. Тогда получим уравнение с разделяющимися переменными: $2 + z^2 = y\cdot z\cdot z'$, решая его находим $z = \pm\sqrt{Cy^2 - 2}$ $\Rightarrow$ $y' = \pm\sqrt{Cy^2 - 2}$ $\Rightarrow$ $\frac{dy}{\sqrt{Cy^2 - 2}} = \pm dx$. Таким образом, общее решение имеет вид: $\frac{1}{C}\ln\left|y + \sqrt{Cy^2 - 2}\right| = \pm x + B.$

Линейные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами. *Линейные однородные дифференциальные уравнения II – го порядка с постоянными коэффициентами*

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{10}$$

где a_0, a_1, a_2 – const, $a_0 \neq 0$. Разделим уравнение (10) на a_0 и введем обозначения $\frac{a_1}{a_0} = p, \quad \frac{a_2}{a_0} = q$, получим уравнение:

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{11}$$

Уравнение $к^2 + pк + q = 0$ называют характеристическим уравнением.

Характеристическое уравнение является уравнением второй степени, поэтому имеет два корня.

1) Корни характеристического уравнения действительные и различные: $k_1 \neq k_2$. В этом случае общее решение уравнения (41) имеет вид:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$

2) Корни характеристического уравнения равные: $k_1 = k_2$.
   Тогда общее решение однородного линейного уравнения имеет вид:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 z}(c_1 + c_2 x).$$

3) Корни характеристического уравнения комплексные.

Общее решение имеет вид:

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x).$$

Пример 7. Найти общее решение уравнения. $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: к^2 + 4к +13 = 0, корни которого к$_{1,2}$ = – 2 ± 3i. Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x).$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения IIго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (12),$$

где $p, q \in R,\ f(x)$ – функция. Общее решение (12) представляет собой сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения применяют:

1) метод вариации пост.
2) метод подбора правой части.

Рассмотрим второй метод.

I. Правая часть уравнения $f(x) = p_n(x) = a_0 x^n + a x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$.

В этом случае частное решение $\overline{y}$ следует искать в виде:

$$\overline{y} = Q_n(x) x^r,$$

где $Q_n(x)$ - многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, с неизвестными коэффициентами, а r – число корней характеристического уравнения совпавших с нулем.

II. Правая часть уравнения $f(x) = e^{ax} p_n(x)$.

Частное решение $\overline{y}$ ищем в виде:

$$\overline{y} = Q_n(x) e^{ax} x^r,$$

где $Q_n(x)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами степени n,

r – число корней характеристического уравнения, совпавших с коэффициентом a.

III. Правая часть уравнения $f(x) = M\cos bx + N\sin bx.$

Тогда $\bar{y} = (A\cos bx + B\sin bx)x^r$, где A, B – неизвестные коэффициенты,

r – ровно числу корней характеристического уравнения совпавших с bi.

Теорема. Если $\bar{y}(x)$ – частное решение линейное неоднородного уравнения (12), а У(х) – общее решение соответствующего однородного уравнения (10), то функция $y = \bar{y}(x) + Y(x)$ – является общим решением неоднородного уравнения (43).

Пример 8. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 13y = 2\cos 3x.$

Решение. Общее решение однородного уравнения было найдено в примере 7: $Y = e^{-2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x).$ Частное решение неоднородного будем искать в виде:

13	$\bar{y} = A\cos 3x + B\sin 3x$,
4	$\bar{y}' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$,
1	$\bar{y}'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$

$13(A\cos 3x + B\sin 3x) + 4(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) - 9A\cos 3x - 9B\sin 3x = 2\cos 3x.$

$$\begin{cases} \cos 3x: & 13A + 12B - 9A = 2, \\ \sin 3x: & 13B - 12A - 9B = 0, \end{cases}$$ A = 1/20, B = 3/20.

Таким образом, $\bar{y} = \frac{1}{20}\cos 3x + \frac{3}{20}\sin 3x$, а общее решение имеет вид

$$y = e^{-2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x) + \frac{1}{20}\cos 3x + \frac{3}{20}\sin 3x.$$

Вопросы для самопроверки

1. Дать определение дифференциального уравнения первого (второго) порядка и его общего и частного решения. Сформулировать задачу Коши для дифференциального уравнения первого (второго) порядка.

2. Изложить основные методы нахождения общего решения первого (второго) порядка.

3. Сформулировать теорему об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

4. Выписать формулы для нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

5. Сформулировать теорему об общем решении линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

6. Изложите правило нахождения частного решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами